Corrigé LM201.

Exercice 1

Calculer les racines troisièmes de $-\frac{9}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Corrigé 1 On pose $z = -\frac{9}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$. On va mettre z sous forme exponentielle. On a :

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \\ z &= 3\sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \\ z &= 3\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}\end{aligned}$$

Les racines cubiques de z_0 sont donc :

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{18}} \\ z_2 &= \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{18} + i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{17\pi}{18}} \\ z_3 &= \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{18} + i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{29\pi}{18}}\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On définit f sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- a) A quelle condition sur a et b a-t-on f continue sur $\mathbb{R}_+$?
b) Peut-on choisir a et b de sorte que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$? sur $\mathbb{R}_+$?

Corrigé 2 a) f est continue sur $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$ (fonctions usuelles). On a $f(1) = \sqrt{1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$. Donc f est continue en 1 si et seulement si $a + b + 1 = 1$.

b) f est dérivable sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ (fonctions usuelles). La racine carrée n'est pas dérivable en 0, donc f n'est jamais dérivable en 0. (Car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = +\infty$). Il reste à regarder en 1. Il faut que les dérivées à droite et à gauche en 1 soient égales. Or :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} 2ax + b = 2a + b$$

Ceci impose : $2a + b = 1$. Le système :

$$\begin{cases} a + b + 1 & = & 1 \\ 2a + b & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

a pour unique solution $a = 1, b = -1$. Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $a = 1$ et $b = -1$.

Exercice 3

Calculer une primitive de $\frac{x^3}{x^2-4}$.

Corrigé 3 On commence par décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples. On a $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$, donc la décomposition s'écrit sous la forme :

$$\frac{X^3}{X^2 - 4} = E(X) + \frac{A}{X - 2} + \frac{B}{X + 2}$$

où $E(X)$ est le quotient de la division euclidienne de X^3 par $X^2 - 4$. On trouve :

$$E(X) = X$$

$$A = \frac{X^3}{X + 2}(2) = 2$$

$$B = \frac{X^3}{X - 2}(-2) = 2$$

On va donc calculer la primitive de $x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$. Elle est de la forme :

$$\frac{x^2}{2} + 2 \ln(x - 2) + 2 \ln(x + 2) + k \quad k \text{ constante}$$

Exercice 4

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ xy + yz + zx & = & -1 \\ xyz & = & -1 \end{cases}$$

Corrigé 4 On va chercher x, y et z comme les racines d'un polynôme du troisième degré. On a :

$$(X - x)(X - y)(X - z) = X^3 - (x + y + z)X^2 + (xy + yz + zx)X - xyz$$

Donc ici, on cherche les racines du polynôme :

$$X^3 - X^2 - X + 1 = (X - 1)^2(X + 1)$$

Les solutions sont donc : $(1, 1, -1)$ et toutes les permutations de ce triplet.

Exercice 5

- a) Calculer $\arccos \cos \frac{19\pi}{6}$.
b) Donner le domaine de définition et une expression simplifiée de $\cos \arcsin x$.

Corrigé 5 a) On rappelle que $\arccos \cos x = x \quad \forall x \in [0, \pi]$. On a :

$$\begin{aligned}\arccos \cos \frac{19\pi}{6} &= \arccos \cos 2\pi + \frac{7\pi}{6} \\ &= \arccos \cos \pi + \frac{\pi}{6} \\ &= \arccos \cos \pi - \frac{\pi}{6} \\ &= \arccos \cos \frac{5\pi}{6} \\ &= \frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

- b) $\cos \arcsin$ est définie sur $[-1, 1]$ et on a, comme par définition $\sin \arcsin x = x \quad \forall x \in [-1, 1]$:

$$\cos^2 \arcsin x = 1 - \sin^2 \arcsin x = 1 - x^2$$

Or $\arcsin$ est à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur lequel le cos est positif. D'où :

$$\cos \arcsin x = \sqrt{1 - x^2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Exercice 6

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$
b) Linéariser $\cos^3(x)$ et en donner une primitive.

Corrigé 6 a) Si $k \in \pi\mathbb{Z}$, cette somme vaut $n + 1$. Sinon, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) &= \Re \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \\ &= \Re e^{\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}} \\ &= \Re e^{\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} e^{-i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\theta/2} e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2} e^{-i\theta/2}}} \\ &= \Re e^{in\theta/2} \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\theta/2)} \\ &= \frac{\cos(n\theta/2) \sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\theta/2)}\end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} \left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3 \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (\cos(3x) + 3 \cos(x))\end{aligned}$$

Une primitive est donc donnée par :

$$\frac{1}{12} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x)$$

Exercice 7

$$(E) \quad xy' + y = 1$$

- a) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
b) (E) admet-elle une solution sur $\mathbb{R}$?

Corrigé 7 a) Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre, à coefficient non constants, non résolue en y' . Pour la résoudre, on va donc la mettre sous la forme résolue, sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$:

$$(E') \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$$

Les solutions de l'équation homogène (sans second membre) sont de la forme :

$$y_{p+}(x) = \lambda_+ \frac{1}{x} \quad \text{où } \lambda_+ \in \mathbb{R} \quad (\text{sur } \mathbb{R}_+^*)$$

$$y_{p-}(x) = \lambda_- \frac{1}{x} \quad \text{où } \lambda_- \in \mathbb{R} \quad (\text{sur } \mathbb{R}_-^*)$$

On voit que la fonction constante égale à 1 est une solution particulière. Les solutions de (E') sont donc de la forme $y_p(x) + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

b) On cherche une solution sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour cela, on prend une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et une sur $\mathbb{R}_-^*$, et on regarde ce qu'il se passe en 0. On définit donc :

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_+ \frac{1}{x} + 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ \lambda_- \frac{1}{x} + 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

On veut pouvoir définir y en 0, ce qui impose $\lambda_+ = \lambda_- = 0$. La seule solution sur $\mathbb{R}$ (qui est bien C^1) est donc la fonction constante égale à 1.

Exercice 8

- a) Donner le terme général de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 9 \\ u_{n+2} - 3u_{n+1} - 4u_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- b) Donner l'expression générale d'une suite qui vérifie :

$$u_{n+2} - 3u_{n+1} - 4u_n = 6n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Corrigé 8 a) On regarde l'équation caractéristique associée : $r^2 - 3r - 4$ dont les racines sont -1 et 4 . La forme générale d'une suite vérifiant cette relation de récurrence est donc :

$$u_n = A(-1)^n + B * 4^n \quad A, B \in \mathbb{R}$$

On utilise les conditions initiales pour déterminer A et B :

$$u_0 = A + B = 1$$

$$u_1 = A(-1) + B * 4 = 9$$

Et on trouve $A = -1$ et $B = 2$.

b) On a déjà la forme générale des suites vérifiant la relation de récurrence donnée, sans le second membre. Il nous reste donc (par linéarité) à trouver une suite particulière solution, les autres solutions seront données par la somme de la solution générale et de cette solution particulière. On la cherche sous la forme d'une suite $an + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$a(n+2) + b - 3(a(n+1) + b) - 4(an + b) = 6n$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} a - 3a - 4a & = 6 \\ 2a + b - 3a - 3b - 4b & = 0 \end{cases}$$

d'où $a = -1$, $b = -1/6$. L'expression générale d'une solution est donc :

$$u_n = A(-1)^n + B * 4^n - n + 1/6$$